216. Closure ニ関スル一問題ヘノ Stone ノ定理ノ應用

吉田 耕作 (阪大)

Hilbert space $\mathfrak{H}$ ニ於ケル unitary transformation ノ one-parameter group $\{U_t\}$ が與ヘラレタトキ, $\mathfrak{H}$ ノ element f が如何ナル條件ヲ滿足スレバ, closed linear manifold $\{f_t\}$ $=\{U_t f\}$ —— f_t ノ全テデ張ラレル一次空間ノ Abschliessung —— が $\mathfrak{H}$ ニ一致スルカ?

U_t ヲ messbar トスル。即チ任意ノ $f, g \in \mathfrak{H}$ ニ對シテ $(U_t f, g)$ ナル t ノ函數が messbar トスル。然ラバ Neumann ノ示シタ如ク $(U_t f, g)$ ハ t ノ stetig ナ函數ニナルカラ Stone ノ定理ニヨリ

$$(1)\quad (U_t f, g)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\, d(E(x)f, g)$$

コヽニ $E(x)$ ハ或 hypermaximal hermition operator ノ resolution of identity.

故ニ $\displaystyle (U_t f, g)\frac{\sin\lambda t}{t}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\, d(E(x)f, g)\frac{1}{2}\int_{-\lambda}^{+\lambda} e^{itv}\, dv$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}d(E(x)f,g)\frac{1}{2}\int_{-\lambda}^{\lambda}e^{it(x+v)}dv$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{iwt}dw\frac{1}{2}\int_{w-\lambda}^{w+\lambda}d(E(x)f,g)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{iwt}dw\frac{1}{2}\Big[\big(E(w+\lambda)-E(w-\lambda)\big)f,g\Big]$$

従ツテ

$$(2)\quad \frac{1}{2}\Big[\big(E(w+\lambda)-E(w-\lambda)\big)f,g\Big]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-iwt}(U_tf,g)\frac{\sin\lambda t}{t}dt$$

定理. $\{U_tf\}$ ガ $\mathfrak{H}$ ヲ張ルタメノ必充條件ハ $\{f_\lambda\}=\{E(\lambda)f\}$ ガ $\mathfrak{H}$ ヲ張ルコトデアル。

上定理ノ應用トシテ Wiener ノ定理 (Fourier integral p.100) ヲ再証明シテミマセウ。即チ

$\mathfrak{H}=L_2(-\infty,\infty)$, $U_tf(x)=f(x+t)$ トスルト (2) ヨリ

$$\frac{1}{2}\big(E(w+\lambda)-E(w-\lambda)\big)f(x)=\frac{1}{\sqrt{2x}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-iwt}f(x+t)\frac{\sin\lambda t}{t}dt$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x-t)\frac{e^{-i(-\lambda-w)t}-e^{-i(\lambda-w)t}}{2it}dt$$

故= $f(x)$, $\dfrac{e^{-i(-\lambda-w)t}-e^{-i(\lambda-w)t}}{2it}$, Fourier

Transform ヲ夫々 $F(y)$, $G_{\lambda,w}(y)$ トスレバ

$$(3)\quad \frac{1}{2}\big(E(w+\lambda)-E(w-\lambda)\big)F(y)=F(y)\,G_{\lambda,w}(y)$$

ココニ

$$\begin{cases} G_{\lambda,w}(y)=\frac{1}{2}, & -\lambda-w<y<\lambda-w \\ \qquad\quad\;\; =0, & y<-\lambda-w \text{ or } \lambda-w<y \\ \qquad\quad\;\; =\frac{1}{4}, & y=-\lambda-w \text{ or } y=\lambda-w \\ \text{但シ } \lambda>0 & \end{cases}$$

楕. F.T.ハ一ツノ unitary transformation ダカラ $\{E(k)f(x)\}$ ガ $\mathfrak{H}$ ヲ張ルコトハ $\{E(k)F(y)\}$ ガ $\mathfrak{H}$ ヲ張ルコトトハ äquivalent。故ニ Wiener ノ定理

$$\mathfrak{H}=L_2(-\infty,\infty),\quad U_t f(x)=f(x+t)$$

トスルトキ $\{U_t f(x)\}$ ガ $\mathfrak{H}$ ニ一致スルタメノ必充條件ハ $f(x)$ ノ F.T. $F(y)$ ノ zero points ノ measure 0 ナルコトデアル。

ヲ得ル。

以上 formal ナ計算ヲ行ッテ詳シイ議論ヲシマセンデシタガ計算ノ意味ヲ有スルコトハ x ノ函数 $(E(x)f,g)$ ガ有界変分デアルコトカラタヾスグ分リマス。